Théorème des extrémas liés

Référence : Avez p.103

> *Théorème :*
> Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n, g_1, \ldots, g_p, f$ des formes linéaires sur U.
> Soit $M = \{x \in U | g_1(x) = \ldots = g_p(x) = 0\}$.
> Si $f|_M$ admet un extremum en $m \in M$ et si les (dg_i) sont linéairement indépendantes alors, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que $df_m = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i dg_i(m)$

Preuve :

• Montrons que M est une sous-variété. Soit $g = (g_1, \ldots, g_p)$. On a $U \cap M = g^{-1}(\{0_{\mathbb{R}^p}\})$ et Dg_u qui est surjective, $\forall u \in U$, car les (dg_i) sont linéairement indépendantes.
Donc : M est une sous-variété de dimension $n-p$. *(p.95 Avez, 3ème déf des sous-variétés)*

• Montrons que T_xM est de la même dimension que M.
M est une sous-variété donc il existe h un difféomorphisme linéarisant tel que :

$$h(U \cap M) = h(U) \cap (\mathbb{R}^{\mathbf{n-p}} \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}) \subset \mathbb{R}^{\mathbf{n-p}} \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}$$

Soit γ une courbe, $\left(\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M \subset \mathbb{R}^n\right)$ telle que $\gamma(0) = x$.Alors, l'image de γ par h est $ho\gamma$ courbe de $\mathbb{R}^{n-p} \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}$ et d'origine $h(\gamma(0)) = h(x)$
En différenciant en $t = 0$,: $(ho\gamma)'(0) = Dh_{\gamma(0)}.\gamma'(0) = Dh_x.\gamma'(0)$. De plus, $\gamma'(0) \in T_xM$, donc $Dh_x.T_xM \in \mathbb{R}^{n-p} \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}$ et réciproquement. On trouve alors, que :

$$Dh_x.T_xM = \mathbb{R}^{n-p} \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}$$

d'où : $dim(T_xM) = dim(Dh_x^{-1}(\mathbb{R}^{n-p} \times \{0_{\mathbb{R}^p}\})) = dim(M) = n-p$

• Montrons que $T_xM = \bigcap_{i=1}^{p} Ker(dg_i(x)) := T$
On sait que $dim(Im(Dg)) = p$ car dg_i linéairement indépendantes. Par le théorème du rang : $dim(Ker(Dg)) = dim(\cap_{i=1}^{p} Ker(dg_i)) = n-p = dim(M)$
Par soucis de dimension, il suffit alors de montrer que $T_xM \subset T$.
Soit γ une courbe, $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M \subset \mathbb{R}^n$ et $\gamma(0) = x$.
On a $g_i(\gamma(t)) = 0$ *(car $\gamma(t) \in M$ et $M = g^{-1}(\{0\})$)*
Donc : $dg_i(\gamma(0)).\gamma'(0) = dg_i(x).\gamma'(0) = 0$ *(en différenciant en t=0)* cela implique que $\gamma'(0) \in \bigcap_{i=1}^{p} Ker(dg_i(x))$ et ainsi, $T_xM \subset T$

• Montrons que $f|_M$ a un extremum en $m \in M$ si $Df_m|_{T_mM} = 0$
Soit $v \in T_mM$, il existe $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M \subset \mathbb{R}^n$ courbe $\mathscr{C}^1$ telle que $\gamma(0) = m$ et $\dot{\gamma}(0) = v$
On a $f|_M o\gamma(t) = fo\gamma(t), \forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ et la fonction $fo\gamma$ admet un extremum en t=0 ($\gamma(0) = m$, *f a un extremum en m donc $fo\gamma$ en 0).*
On a $\forall v \in T_mM, Df_m.v = 0$ donc $Df_m|_{T_mM} \equiv 0$.

• On conclut avec le lemme des noyaux :
m est un extremum de $f|_M \Leftrightarrow \forall v \in T_mM, Df_m.v = 0$ et donc $v \in Ker(Df_m)$. De plus, $T_mM = \bigcap_{i=1}^{p} Ker(dg_i(m))$.

Donc :

m est un extremum de $f|_M \Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^{p} Ker(dg_i(m)) \subset Ker(df_m)$

La famille des $(dg_i(m))$ est linéairement indépendantes, on peut donc la compléter en une base de $(\mathbb{R}^n)^*$. Comme $df_m \in (\mathbb{R}^n)^*$ alors :

$$\exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, df_m = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i dg_i(m)$$

De plus, $\bigcap_{i=1}^{p} Ker(dg_i(m)) = Vect(e_{p+1}, \ldots, e_n)$.

Soit, $r = p+1, \ldots, n$, comme $\bigcap_{i=1}^{p} Ker(dg_i(m)) \subset Ker(Df_m)$ alors :

$$df_m(e_i) = 0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i dg_i(m)(e_r) = \lambda_r$$

donc $\lambda_{p+1} = \ldots = \lambda_n = 0$ et on obtient le résultat. $\square$